FÓRMULAS Y TABLAS ESTADÍSTICAS

JR

13 de junio de 2016

DATOS ORDINALES: pueden ordenarse de menor a mayor

El **rango** de un dato ordinal es el número de datos que son estrictamente menores que él. El **puesto** de un dato es el número de datos mejores que él más uno. El **percentil** asociado a un dato x es el porcentaje de datos inferiores a él. Se puede calcular a partir del rango pero es más usual calcularlo por la siguiente definición:

Regla para percentiles: Supongamos que hay n datos, *ordenados de menor a mayor*. Para hallar el percentil k sobre n datos, primero se calcula

$L_k = n \times \frac{k}{100}$.

Si L_k es un entero, el percentil k es el promedio entre las posiciones L_k y la siguiente. Si L_k es fraccionario, se aproxima por arriba a la posición más cercana. **Cuartiles:** El cuartil cero es el mínimo, el primer cuartil es el percentil 25. El segundo es la **mediana**, el percentil 50. El tercero es el percentil 75 y el cuarto es el máximo.

DATOS CUANTITATIVOS: n **datos que pueden sumarse y multiplicarse**

LISTA DE DATOS		
Nombre	$x = dato$	$x^2 = dato^2$
-	-	-
-	Σx	Σx^2

MEDIA LISTA DE DATOS $= \bar{X} = \frac{\sum x}{n}$

VARIANZA LISTA DE DATOS$= s^2 = \frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n(n-1)}$

TABLAS DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS			
$x = dato$	F = frecuencia	xF	x^2F
-	-	-	-
	n = ΣF	ΣxF	$\Sigma x^2 F$

MEDIA TABLA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS $= \bar{X} = \frac{\Sigma(xF)}{n} = \frac{\Sigma(xF)}{\Sigma F}$

Suma de cuadrados $= S_{xx} = \Sigma x^2 F - \frac{(\Sigma xF)^2}{n}$

VARIANZA TABLA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS $= s^2 = \frac{S_{xx}}{n-1}$

Resumen de 5 datos y boxplot para una muestra: mínimo, primer cuartil, segundo cuartil (mediana), tercer y cuarto cuartil = máximo. Se dibuja a escala con unidades homogéneas.

Homogeneidad y coeficiente de variación para datos positivos. Si el **coeficiente de variación** $C = \frac{s}{\bar{X}}$ es del orden de 0.01, la población puede tomarse como homogénea y ser representada por la media. Si es de 0.1 como más o menos homogénea y sabremos que la media causará protestas. Pero si el coeficiente de variación supera 0.5, la población de homogénea no tiene nada y no debe pretenderse que la media represente la población. Esta regla puede ser anulada por una mejor información sobre el contexto del problema.

Un dato es extremo según el criterio de la campana si queda por fuera de dos desviaciones estándares o lo determinado por la significancia.

Rango intercuartilar para datos numéricos: rango que cubre los cuartiles centrales 2 y 3: es el cuartil 3 menos el cuartil 1. **Lo normal según el criterio del rango intercuartilar** es lo que va desde el primer cuartil menos 1.5 veces el rango intercuartilar hasta el tercer cuartil más 1.5 veces el rango intercuartilar. **Lo que queda por fuera es extremo**.

Teorema de Chevichev Para una variable aleatoria X cualquiera de datos cuantitativos con función densidad de probabilidad $p(x)$, normal o nó, media μ y desviación σ, sea k el número de desviaciones, el cual puede ser fraccionario o decimal. Entonces se tiene que

$$P(\mid x - \mu \mid \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

lo cual dice que la probabilidad o área de lo que queda más allá de k desviaciones alejado de la media es menor o igual que $\frac{1}{k^2}$. Por ejemplo, si $k = 3$, dicha probabilidad es $1/9 = 0{,}11111$. En contraste, para una normal la misma probabilidad, con valor absoluto de z mayor que 3, es $2 \times 0{,}0013 = 0{,}0026$.

LA BINOMIAL: $X \sim Bi(n, p)$. X cuenta el número de caras al tirar n monedas con probabilidad de cara igual a p. Media $= np$; varianza $= np(1-p)$. **Probabilidad de sacar r caras al tirar n monedas:**

$p(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$

donde

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ puede sacarse con la calculadora : $n + nCr + r$. Ejemplo: $\binom{10}{2} = 45$.

TRANSFORMADA z: $z(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$

TLC: La media de $\bar{X}_n$ es la misma de X pero la desviación se divide por la raíz del número de datos.

FÓRMULAS DEL DICCIONARIO DE EXPERIMENTOS PARA n DATOS

NOTACIÓN: $z_{(\alpha,2)} = z$ crítico con significancia α y dos colas. Lo mismo con los demás estadígrafos. La media muestral se denota $\bar{X}_n$, la poblacional μ. La varianza muestral se denota $VAR = VAR_X = s^2 = s_X^2$, la poblacional $\sigma^2 = \sigma_X^2$. La desviación muestral $s = s_X$, la poblacional $\sigma = \sigma_X$.

Tabla corta:

1. Comparación de una media muestral con una media poblacional conociendo la desviación poblacional. Se usa una z.

2. Comparación de la diferencia de dos medias experimentales con la diferencia esperada de dos medias poblacionales conociendo las varianzas poblacionales: se usa una z.

3. Comparación de una media muestral con una media poblacional conociendo la desviación de la muestra: se usa una t.

4. Comparación de una proporción observada o frecuencia relativa con una probabilidad (poblacional): se usa una z.

5. Comparación de la diferencia de dos proporciones experimentales con la diferencia de las probabilidades. Se usa la z y la t.

6. Comparación de la varianza de una muestra al azar con una varianza poblacional: se usa una chi-cuadrado χ^2.

7. Comparación de la relación de dos varianzas experimentales con la relación esperada de varianzas poblacionales: se usa una F.

8. Comparación de la diferencia de dos medias experimentales con la diferencia esperada de dos medias poblacionales conociendo las dos varianzas muestrales de las cuales se infiere que las varianzas poblacionales son iguales. Primero se estudia si las varianzas poblacionales son o no iguales, por tanto es con dos colas y con una F, caso 7. Si las varianzas poblacionales resultan iguales, se comparan las medias (puede ser con una o con dos colas, depende del problema) con una t.

9. Comparación de la diferencia de dos medias experimentales con la diferencia esperada de dos medias poblacionales conociendo las dos varianzas muestrales de las cuales se infiere que las varianzas poblacionales son diferentes. Primero se estudia si las varianzas poblacionales son o no iguales, por tanto es con dos colas y con una F. Si las varianzas poblacionales son diferentes, se usa una t para comparar medias..

10. Comparación de la diferencia de dos medias experimentales con la diferencia esperada de medias poblacionales para datos apareados (miopía ojo izquierdo vs. miopía ojo derecho): se usa una t.

Recetario completo:

1. **Comparar la media muestral con la poblacional sabiendo σ, la desviación poblacional.**

   TLC : Si se sabe σ_X, H_o para comparar la media muestral con la poblacional:

   Prueba de dos colas: $H_o : \mu_x = algo$ y $H_a : \mu_x \neq algo$

   Prueba de una cola: $H_o : \mu_x = algo$ y $H_a : \mu_x < algo$

   Discrepancia entre lo hallado $\bar{X_n}$ y lo esperado μ_X:

   $$z_{obs} = \frac{\bar{X_n} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

   Intervalo de confianza para la media μ:

   $$\bar{X_n} - (z_{(\alpha,2)})\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X_n} + (z_{(\alpha,2)})\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

   Error estándar de la estimación de la media $= \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

   Número de datos de la muestra para estimar la media con error máximo de estimación E:

   $$n = ((z_{(\alpha,2)})\frac{\sigma_X}{E})^2.$$

2. **Comparar la diferencia de medias muestrales con la diferencia de medias poblacionales sabiendo las varianzas poblacionales:**

   Prueba de dos colas: $H_o : \mu_x - \mu_Y = algo$ y $H_a : \mu_x - \mu_Y \neq algo$

   Prueba de una cola: $H_o : \mu_x - \mu_Y = algo$ y $H_a : \mu_x - \mu_Y < algo$

   Estadígrafo de discrepancia entre lo observado $\bar{X_m} - \bar{Y_n}$ y lo esperado según H_o de la diferencia de dos medias: $\mu_X - \mu_Y$

   $$z_{obs} = \frac{(\bar{X_m} - \bar{Y_n}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X{}^2}{m} + \frac{\sigma_Y{}^2}{n}}}$$

   El intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ se da por

   $$(\bar{X_m} - \bar{Y_n}) - z_{(\alpha,2)}\sqrt{\frac{\sigma_X{}^2}{m} + \frac{\sigma_Y{}^2}{n}} < \mu_X - \mu_Y < (\bar{X_m} - \bar{Y_n}) + z_{(\alpha,2)}\sqrt{\frac{\sigma_X{}^2}{m} + \frac{\sigma_Y{}^2}{n}}$$

3. **Comparación de una media muestral con una poblacional conociendo la desviación de la muestra**:

   Prueba de dos colas: $H_o : \mu_x = algo$ y $H_a : \mu_x \neq algo$

   Prueba de una cola: $H_o : \mu_x = algo$ y $H_a : \mu_x < algo$

   Estadígrafo de contraste entre lo observado $\bar{X}_n$ y μ_X, lo esperado según H_o :

   $t_{obs} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ con **gli = grados de libertad** = n-1.

   Intervalo de confianza para la media μ:

$$\bar{X}_n - (t_{(\alpha,2)})\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + (t_{(\alpha,2)})\frac{s}{\sqrt{n}}$$

4. **Comparar una frecuencia relativa (de una muestra) f con una probabilidad (proporción poblacional) p de una binomial.**

   - $H_o : p = p_o$.

     Para evaluar la hipótesis nula $H_o : p = p_o$ se puede usar el estadígrafo o estadístico de contraste

$$z_{obs} = \frac{f - p_o}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}}$$

   - Si $f = \frac{k}{n}$ es una frecuencia relativa observada, el intervalo de confianza $1 - \alpha$ para la p correspondiente es:

$$f - (t_{(\alpha,2)})\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} < p < f + (t_{(\alpha,2)})\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

     Los gli de la t son $n-1$. Si son mayores que 30, se aproxima por la z. El intervalo de confianza para p es tal que si uno apuesta a que p está en dicho intervalo, uno acierta una proporción $1 - \alpha$ de las veces que apuesta. Eso se escribe así:

$$Prob(f - (t_{(\alpha,2)})\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} < p < f + (t_{(\alpha,2)})\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}) = 1 - \alpha$$

   - Para estimar una p sabiendo que debe estar alrededor de $\check{p}$ de tal forma que la mitad de la longitud del intervalo de confianza sea no superior a E, hay que tomar **un número de datos no inferior a**

$$n = (z_{(\alpha,2)})^2 \frac{\check{p}(1-\check{p})}{E^2}.$$

     Si no se conoce nada de p, se toma el peor caso, $p = 1/2$:

$$n = (z_{(\alpha,2)})^2 \frac{1}{4E^2}.$$

5. **Comparar la diferencia entre dos frecuencias relativas $f - g = X/m - Y/n$ del mismo descriptor pero de muestras de poblaciones distintas y al azar con la diferencia de dos probabilidades $p - r$:**

   Prueba de dos colas: $H_o : p - r = algo$ y $H_a : p - r \neq algo$

   Prueba de una cola: $H_o : p - r = algo$ y $H_a : p - r < algo$

   Para medir la **Discrepancia entre lo observado $f - g$ y lo esperado $p - r$ para una H_o de diferencia de proporciones** hay que considerar varios casos:

   Caso 1: Cuando se da p y r junto con las frecuencias relativas f y g, y los tamaños de las muestras m, n. Primero calculamos la desviación conjunta binomial poblacional dada por

   $s_b = \sqrt{\frac{p(1-p)}{m} + \frac{r(1-r)}{n}}$

y a continuación la discrepancia $= z_{obs} = \frac{(f-g)-(p-r)}{s_b}$

Se trata de una z pues s_b se calcula con valores poblacionales.

Caso 2: No se da p ni r pero se dan las frecuencias relativas f, g, los tamaños de las muestras m y n y además $Ho : p - r = 0$. Podemos unir las dos muestras en una conjunta para estimar p, poblacional, por medio de $\hat{p} = p$ gorro, muestral global :

$\hat{p} = \frac{X+Y}{m+n} = \frac{f \times m + g \times n}{m+n}$

$s_b = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}$

discrepancia $= t_{obs} = \frac{(f-g)-(p-r)}{s_b}$

Se trata de una t pues s_b se calcula con valores muestrales. **Los** gli **son** $n + m - 2$.

Caso 3: No se da p ni r pero se dan las frecuencias relativas f, g, los tamaños de las muestras m y n y además $Ho : p - r \neq 0$:

$s_b = \sqrt{\frac{f(1-f)}{m} + \frac{g(1-g)}{n}}$

discrepancia $= t_{obs} = \frac{(f-g)-(p-r)}{s_b}$

Puesto que s_b se calcula con valores muestrales de dos binomiales diferentes que aproximamos por normales, tenemos una t con **gli igual al menor de** $m - 1$ **y** $n - 1$. La diferencia de los gli del caso 2 al 3 se debe a que en el caso 2 podemos unir las dos muestras en una sola debido a la H_o que dice que las proporciones son iguales, pero en el caso 3 no.

Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones $p - r$**:**

$$f - g - (t_{(\alpha,2)})\sqrt{\frac{f(1-f)}{m} + \frac{g(1-g)}{n}} < p - r < f - g + (t_{(\alpha,2)})\sqrt{\frac{f(1-f)}{m} + \frac{g(1-g)}{n}}$$

gli = el mínimo entre $n - 1$ **y** $m - 1$. Cuando da mayor que 30 puede usarse una z.

6. **Comparar una varianza muestral** VAR **con una poblacional** σ^2**.**

   Prueba de dos colas (ejemplo arbitrario): $H_o : \sigma^2 = algo$ y $H_a : \sigma^2 \neq algo$

   Prueba de una cola: $H_o : \sigma^2 = algo$ y $H_a : \sigma^2 < algo$

   Estadígrafo de contraste entre lo observado VAR **y lo esperado** σ^2 **según** H_o **de una varianza**: para las varianzas, lo esperado según la H_o y lo hallado experimentalmente no se compara restando sino **dividiendo**.

   $$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)VAR}{\sigma^2} \text{ con } n-1 \text{ gli}$$

   Fórmula general para el intervalo de confianza de la VARIANZA σ^2

   $$\frac{(n-1)VAR}{\chi^2_+} < \sigma^2 < \frac{(n-1)VAR}{\chi^2_-}$$

   donde χ^2_- y χ^2_+ son los valores críticos superior e inferior de la distribución chi-cuadrado. Para hallar el IC de la DESVIACIÓN se saca la raíz cuadrada en todo lado del IC de la varianza.

   Para hallar los valores críticos de la chi cuadrado hay varios casos:

a) Cuando n es 31 o menos, los valores críticos de la chi-cuadrado se miran en la tabla, pág. 11.

b) Si $n \geq 32$ los valores críticos se aproximan por:
$\chi^2_- = n - 1 - z_{(\alpha,2)}\sqrt{2(n-1)}$
$\chi^2_+ = n - 1 + z_{(\alpha,2)}\sqrt{2(n-1)}$.

c) Si los gli son mayores que 100 se puede usar la siguiente aproximación para el IC de la desviación:

$$s - \frac{z_{(\alpha,2)}}{\sqrt{2n}} < \sigma < s + \frac{z_{(\alpha,2)}}{\sqrt{2n}}$$

Si preguntan el IC de la varianza, se eleva al cuadrado en todo lado del IC de la desviación.

Tamaño de la muestra para la estimación de la DESVIACIÓN si por la literatura o por una muestra pequeña se sabe que vale aproximadamente D y si se desea que el error estandar (la mitad del intervalo de confianza) sea E:

$n = \frac{1}{2}(\frac{z_{(\alpha,2)}D}{E})^2$

7. **Comparar la relación de quebrado entre las varianzas de dos muestras independientes y aleatorias con la relación de quebrado entre dos varianzas poblacionales.**

Estadígrafo de discrepancia para una H_o de proporción entre varianzas, la MAYOR EN EL NUMERADOR. Usamos el subíndice G de grande y P de pequeño:

$H_o : \frac{\sigma^2_G}{\sigma^2_P} = R$

$R_{obs} = \frac{VAR_G}{VAR_P}$

Estadígrafo de contraste entre lo observado R_{obs} y lo esperado R:

$F_{obs} = \frac{R_{obs}}{R} = \frac{VAR_G}{RVAR_P}$

F_c con $m - 1$ gli en el numerador y $n - 1$ gli en el denominador.

Intervalo de confianza para la proporción de dos varianzas, $\frac{\sigma^2_G}{\sigma^2_P}$:

$$\frac{VAR_G}{VAR_P F_+} < \frac{\sigma^2_G}{\sigma^2_P} < \frac{VAR_G}{VAR_P F_-}$$

donde F_+ es el valor de la tabla para la significancia dada para dos colas con los grados de libertad en el numerador de la varianza grande y los grados de libertad del denominador para la varianza pequeña. En tanto que $F_- = \frac{1}{I}$ donde I denota la F_+ con los grados de libertad INTERCAMBIADOS.

Por ejemplo, tomemos $\alpha = 0{,}02$ con dos colas, 7 gli numerador y 12 gli denominador. La F de la tabla es 4.64. Ese valor es F_+, el valor crítico superior. Para encontrar F_- buscamos en la tabla de la misma significancia el valor correspondiente a 12 gli en el numerador y 7 gli en el denominador: da 6.47 que es I. Entonces $F_- = 1/6{,}47 = 0{,}155$.

Para comparar la diferencia entre dos medias de dos muestras independientes y aleatorias con la diferencia esperada de dos medias poblacionales conociendo las dos varianzas muestrales se requiere primero saber si las varianzas poblacionales son iguales o diferentes, lo cual se hace previamente

con un test F, que está en el caso 7. Si las varianzas poblacionales son iguales, se usa el caso 8. Si son diferentes, el caso 9.

8. **Si las Varianzas poblacionales se estiman a partir del experimento y resultan iguales, podemos usar como estadígrafo de contraste entre $\bar{X_m}-\bar{Y_n}$, lo observado, y lo predicho por la H_o: $\mu_X - \mu_Y = algo$.**

   $t_{obs} = \frac{(\bar{X_m}-\bar{Y_n})-(\mu_X-\mu_Y)}{s_c\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$ **gli = grados de libertad = n+m-2.**

   La desviación conjunta muestral s_c puede expresarse como

   $$s_c = \sqrt{\frac{VAR_X(m-1)+VAR_Y(n-1)}{n+m-2}}$$

   Si el valor de la desviación conjunta no da entre las dos desviaciones, hay un error de aritmética.

   El intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ se da por

   $$(\bar{X_m}-\bar{Y_n}) - t_{(\alpha,2)}s_c\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} < \mu_X - \mu_Y < (\bar{X_m}-\bar{Y_n}) + t_{(\alpha,2)}s_c\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

9. **Comparación de la diferencia entre dos medias de dos muestras independientes y aleatorias con la diferencia esperada de dos medias poblacionales conociendo las dos varianzas muestrales de las cuales se infiere que las varianzas poblacionales son diferentes. Variables distribuídas normalmente.**

   $H_o : \mu_X - \mu_Y = algo$

   Lo observado es $\bar{X_m} - \bar{Y_n}$

   Estadígrafo de contraste entre lo observado, $\bar{X_m} - \bar{Y_n}$, y lo esperado según la H_o, $\mu_X - \mu_Y$:

   $$t_{obs} = \frac{(\bar{X_m}-\bar{Y_n})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{VAR_X}{m}+\frac{VAR_Y}{n}}}$$

   El intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ se da por

   $$(\bar{X_m}-\bar{Y_n}) - t_{(\alpha,2)}\sqrt{\frac{VAR_X}{m}+\frac{VAR_Y}{n}} < \mu_X - \mu_Y < (\bar{X_m}-\bar{Y_n}) + t_{(\alpha,2)}\sqrt{\frac{VAR_X}{m}+\frac{VAR_Y}{n}}$$

   Los grados de libertad son calculados como sigue:

   $$gli = \frac{(\frac{Var_X}{n_X}+\frac{Var_Y}{n_Y})^2}{\frac{(\frac{Var_X}{n_X})^2}{n_X+1}+\frac{(\frac{Var_Y}{n_Y})^2}{n_Y+1}} - 2$$

10. **Comparación de la diferencia de medias muestrales con la diferencia esperada de medias poblacionales para datos apareados (miopía ojo izquierdo vs. miopía ojo derecho de la misma persona). $\bar{\Delta}$ = Promedio poblacional de las diferencia apareadas.**

    $H_o : \bar{\Delta} = algo$

    Los datos vienen en n pares (x_i, y_i). Cada par de datos da origen a una diferencia $D_i = x_i - y_i$, la cual se reporta con su signo. Los D_i tienen una media $\bar{D}$ y una desviación s:

Dioptrías lente ojo de descanso, X, vs. ojo de trabajo, Y.				
Paciente	X	Y	$D = X - Y$	D^2
			$\sum D$	$\sum D^2$

$\bar{D} = \frac{\Sigma D}{n} = \frac{\Sigma(x_i - y_i)}{n}$. (Uno puede cuadrar las cosas para que $\bar{D}$ siempre sea positiva.)

$s = s_D = \sqrt{\frac{n(\Sigma D^2) - (\Sigma D)^2}{n(n-1)}}$

Estadígrafo de contraste para medir la discrepancia entre lo observado (dado por $\bar{D}$, el promedio observado de las diferencia apareadas), y lo esperado según la $H_o : \bar{\Delta} = promedio\ esperado\ de\ las\ diferencias\ apareadas = algo$

$$t_{obs} = \frac{\bar{D} - \bar{\Delta}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Los gli de la t son $n - 1$.

Intervalo de confianza para la diferencia apareada de medias:

$$\bar{D} - t_{(\alpha,2)} \frac{s_D}{\sqrt{n}} < \bar{\Delta} = \mu_X - \mu_Y < \bar{D} + t_{(\alpha,2)} \frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL: $p(A/B) = p(A \cap B)/p(B)$.

PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN DE DOS EVENTOS: si son independientes $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, pero si no los son, $p(A \cap B)$ debe sacarse de los datos.

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE DOS EVENTOS: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

TABLAS DE CONTINGENCIA (H_o: los dos FACTORES son independientes; H_a : los factores son dependientes). Éste test es equivalente al siguiente y los dos se resuelven por el mismo método:

TEST DE HOMOGENEIDAD DE PROPORCIONES (H_o: las proporciones son iguales; H_a : hay al menos un par de proporciones que son diferentes).

Ambos tests se deciden con una cola (salvo problemas con contexto excepcional).

Cálculo de lo esperado según la H_o: si los dos factores son independientes (o si las proporciones son homogéneas), todo par de eventos son independientes. Por tanto, la probabilidad de la intersección de dos eventos es el producto de las probabilidades de cada uno:

$p(A \bigcap X) = p(A)p(X)$,

Esta probabilidad se multiplica por n, la suma total de todas las entradas de la tabla de contingencia, para hallar el valor esperado en la casilla (A,X).

Para calcular la discrepancia entre lo que se ve y lo que se cree según la H_o:

$Discrepancia = \sum \frac{(Observado_{ij} - Esperado_{ij})^2}{Esperado_{ij}} = (\sum \frac{(Observado_{ij})^2}{Esperado_{ij}}) - n$

Cálculo de la discrepancia		
Observado	*Esperado*	$Observado^2/Esperado$
-	-	-
-	-	$\Sigma =$

$Discrepancia = \Sigma - n$ donde n es la gran suma de la tabla de contingencia original.

La discrepancia se compara con la chi cuadrado crítica con (r-1)(c-1) gl.

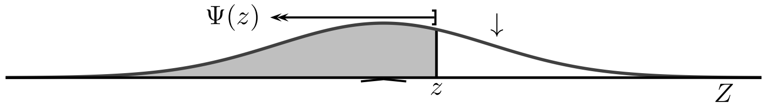

Figura 0. Sobre la campana normal estándar, media cero y desviación uno, el área antes de z se denota $\Psi(z)$ (tridente o psi de z) y es el valor reportado por nuestra tabla:

LA Ψ PARA $Z \sim N(0,1)$			
$\Psi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$			
1 cola: $\Psi = \alpha$, 2 colas $\Psi = \alpha/2$			
z-	$\Psi(z)$	z+	$\Psi(z)$
0	0.5000	0	0.5000
-0.10	0.4602	0.10	0.5398
-0.20	0.4207	0.20	0.5793
-0.30	0.3821	0.30	0.6179
-0.40	0.3446	0.40	0.6554
-0.50	0.3085	0.50	0.6915
-0.60	0.2743	0.60	0.7257
-0.70	0.2420	0.70	0.7580
-0.80	0.2119	0.80	0.7881
-0.90	0.1841	0.90	0.8159
-1.00	0.1587	1.00	0.8413
-1.10	0.1357	1.10	0.8643
-1.20	0.1151	1.20	0.8849
-1.30	0.0968	1.30	0.9032
-1.40	0.0808	1.40	0.9192
-1.50	0.0668	1.50	0.9332
-1.60	0.0548	1.60	0.9452
-1.64	0.05	1.64	0.95
-1.70	0.0446	1.70	0.9554
-1.80	0.0359	1.80	0.9641
-1.90	0.0287	1.90	0.9713
-1.96	0.025	1.96	0.975
-2.00	0.0228	2.00	0.9772
-2.10	0.0179	2.10	0.9821
-2.20	0.0139	2.20	0.9861
-2.30	0.0107	2.30	0.9893
-2.40	0.0082	2.40	0.9918
-2.50	0.0062	2.50	0.9938
-2.60	0.0047	2.60	0.9953
-2.70	0.0035	2.70	0.9965
-2.80	0.0026	2.80	0.9974
-2.90	0.0019	2.90	0.9981
-3.00	0.0013	3.00	0.9987
-3.10	0.0010	3.10	0.9990
-3.80	0.0001	3.80	0.9999
$-\infty$	0	∞	1

La t

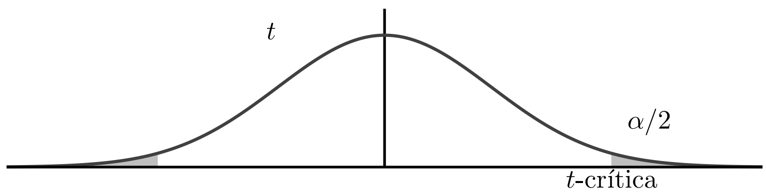

Figura 1. La t se parece a la z, aunque es un poco más explayada. Cuando los ***gli = grados de libertad*** *crecen, la t tiende a la z. Para dos colas y para una significancia α hay dos valores simétricos de la t-crítica.*

La t-crítica. Para 2 colas: $\beta = \alpha$; 1 cola: $\beta = 2\alpha$					
gli	$\beta = 0{,}10$	$\beta = 0{,}05$	$\beta = 0{,}04$	$\beta = 0{,}02$	$\beta = 0{,}01$
1	6.314	12.706	15.894	31.821	63.657
2	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925
3	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841
4	2.132	2.776	2.998	3.747	4.604
5	2.015	2.571	2.756	3.365	4.032
6	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.264	2.624	2.997
15	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.166	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.157	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.151	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750
∞	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576

Para $gli > 30$, la t y la z coinciden, por lo tanto, en ese caso puede usarse la z en vez de la t lo cual permite trabajar con cualquier significancia. **Se usa la t para muestras pequeñas, la z para muestras grandes.**

La χ^2
Chi-cuadrado
Gráfica y
Tablas

Si $gli = n - 1 = \nu \to \infty$, $\chi^2 \sim N(\mu = \nu, \sigma = \sqrt{2\nu})$

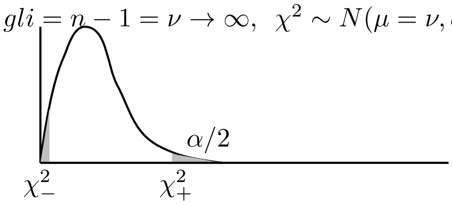

Figura 2. La tabla adjunta da los valores críticos χ^2_- y χ^2_+ para un α dado, una y dos colas.

χ^2-crítica. Con DOS colas $\beta = \alpha$; con UNA, $\beta = 2\alpha$. **gli** = grados de libertad						
gli	$\beta = 0{,}02$	$\beta = 0{,}02$	$\beta = 0{,}05$	$\beta = 0{,}05$	$\beta = 0{,}10$	$\beta = 0{,}10$
	χ^2_-	χ^2_+	χ^2_-	χ^2_+	χ^2_-	χ^2_+
1	0.00016	6.635	0.00098	5.024	0.0039	3.8415
2	0.0201	9.210	0.0506	7.378	0.1026	5.9915
3	0.115	11.345	0.216	9.348	0.3518	7.8147
4	0.297	13.277	0.484	11.143	0.7107	9.4877
5	0.554	15.089	0.831	12.833	1.1455	11.0705
6	0.872	16.812	1.237	14.449	1.6354	12.5916
7	1.239	18.475	1.690	16.013	2.1673	14.0671
8	1.646	20.090	2.180	17.535	2.7326	15.5073
9	2.088	21.666	2.700	19.023	3.3251	16.9190
10	2.558	23.209	3.247	20.483	3.9403	18.3070
11	3.053	24.725	3.816	21.920	4.5748	19.6751
12	3.571	26.217	4.404	23.337	5.2260	21.0261
13	4.107	27.688	5.009	24.736	5.8919	22.3620
14	4.660	29.141	5.629	26.119	6.5706	23.6848
15	5.229	30.578	6.262	27.488	7.2609	24.9958
16	5.812	32.000	6.908	28.845	7.9616	26.2962
17	6.408	33.409	7.564	30.191	8.6718	27.5871
18	7.015	34.805	8.231	31.526	9.3905	28.8693
19	7.633	36.191	8.907	32.852	10.1170	30.1435
20	8.260	37.566	9.591	34.170	10.8508	31.4104
21	8.897	38.932	10.283	35.479	11.5913	32.6706
22	9.542	40.289	10.982	36.781	12.3380	33.9244
23	10.196	41.638	11.689	38.076	13.0905	35.1725
24	10.856	42.980	12.401	39.364	13.8484	36.4150
25	11.524	44.314	13.120	40.647	14.6114	37.6525
26	12.198	45.642	13.844	41.923	15.3792	38.8851
27	12.879	46.963	14.573	43.194	16.1514	40.1133
28	13.565	48.278	15.308	44.461	16.9279	41.3371
29	14.256	49.588	16.047	45.722	17.7084	42.5570
30	14.953	50.892	16.791	46.979	18.4927	43.7730

Cuando n crece, la gráfica de la χ^2 se corre hacia la derecha y se estira pareciéndose a una normal con media $\mu = n - 1$ y desviación $\sigma = \sqrt{2(n-1)}$. Por ello, para $n > 30$ se puede aplicar la fórmula de los valores críticos de la Z: $\chi^2_- = \mu - z\sigma$, $\chi^2_+ = \mu + z\sigma$, donde la z se toma de acuerdo a la significancia y con dos colas. En definitiva: $\chi^2_- = n - 1 - z_{(\alpha,2)}\sqrt{2(n-1)}$; $\chi^2_+ = n - 1 + z_{(\alpha,2)}\sqrt{2(n-1)}$.

La F Gráfica y Tablas

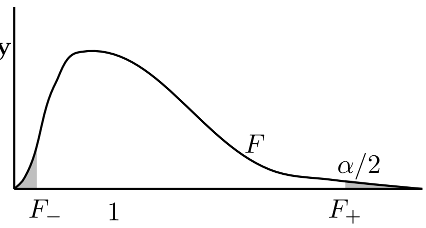

Figura 3. Esquema general de cualquier F. Para un α dado y dos colas, hay valores críticos denotados F_- y F_+. La moda está por ahí cerca de 1.

Tabla de F_+, valor crítico superior de la F, con DOS colas y $\alpha = 0{,}02$, o con UNA cola y $\alpha = 0{,}01$.

En el primer renglón están los gli (grados de libertad) del numerador <u>subrayados</u>. En la primera columna los gli del denominador.

F_+ = Valor crítico superior de la F con DOS colas y $\alpha = 0{,}02$, o con UNA cola y $\alpha = 0{,}01$														
En el primer renglón están los gli del <u>numerador</u>. En la primera columna los gli del denominador														
gli	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>12</u>	<u>15</u>	<u>20</u>	<u>∞</u>
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.00
l5	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	2.65
18	8.29	16.01	509	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.36
22	7.95	.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	1.60
120	6.85	4.79	395	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.00

Tabla de F_+, valor crítico superior de la F, con DOS colas y $\alpha = 0{,}05$, o con UNA cola y $\alpha = 0{,}025$

En el primer renglón están los gli (grados de libertad) del numerador subrayados. En la primera columna los gli del denominador.

F_+ = Valor crítico superior de la F con DOS colas y $\alpha = 0{,}05$, o con UNA cola y $\alpha = 0{,}025$															
En el primer renglón están los gli del numerador. En la primera columna los gli del denominador															
gli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	∞
2	38,5	39	39,1	39,2	39,2	39,3	39,3	39,3	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,8	14,7	14,6	14,5	14,4	14,4	14,2	14,1	14,0	14,0	13,9
4	12,2	10,6	9,9	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,9	8,84	8,65	8,55	8,46	8,41	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,38	7,14	6,97	6,85	6,75	6,68	6,61	6,42	6,32	6,22	6,17	6,02
6	8,81	7,25	6,59	6,22	5,98	5,81	5,69	5,59	5,52	5,46	5,26	5,16	5,06	5,01	4,85
7	8,07	6,54	5,88	5,52	5,28	5,11	4,99	4,89	4,82	4,76	4,56	4,46	4,36	4,30	4,14
8	7,57	6,05	5,41	5,05	4,81	4,65	4,52	4,43	4,35	4,29	4,10	3,99	3,89	3,83	3,67
9	7,20	5,71	5,07	4,71	4,48	4,31	4,19	4,10	4,02	3,96	3,76	3,66	3,56	3,50	3,34
10	6,93	5,45	4,82	4,46	4,23	4,07	3,94	3,85	3,77	3,71	3,52	3,41	3,31	3,25	3,08
11	6,72	5,25	4,63	4,27	4,04	3,88	3,75	3,66	3,58	3,52	3,32	3,22	3,11	3,06	2,89
12	6,55	5,09	4,47	4,12	3,89	3,72	3,60	3,51	3,43	3,37	3,17	3,07	2,96	2,90	2,7
13	6,41	4,96	4,34	3,99	3,76	3,60	3,48	3,38	3,31	3,24	3,05	2,94	2,83	2,77	2,60
14	6,29	4,85	4,24	3,89	3,66	3,50	3,37	3,28	3,20	3,14	2,94	2,84	2,73	2,67	2,49
15	6,19	4,76	4,15	3,80	3,57	3,41	3,29	3,19	3,12	3,06	2,86	2,75	2,64	2,58	2,40
16	6,11	4,68	4,07	3,72	3,50	3,34	3,21	3,12	3,04	2,98	2,78	2,68	2,56	2,50	2,32
17	6,04	4,61	4,01	3,66	3,43	3,27	3,15	3,06	2,98	2,92	2,72	2,61	2,50	2,44	2,25
18	5,97	4,55	3,95	3,60	3,38	3,22	3,09	3,00	2,92	2,86	2,66	2,55	2,44	2,38	2,19
19	5,92	4,50	3,90	3,55	3,33	3,17	3,05	2,95	2,88	2,81	2,61	2,50	2,39	2,33	2,14
20	5,87	4,46	3,85	3,51	3,28	3,12	3,00	2,91	2,83	2,77	2,57	2,46	2,34	2,28	2,09
21	5,82	4,41	3,81	3,47	3,25	3,08	2,96	2,87	2,79	2,73	2,53	2,42	2,30	2,24	2,05
22	5,78	4,38	3,78	3,4	3,21	3,05	2,93	2,83	2,76	2,69	2,49	2,38	2,27	2,20	2,01
23	5,74	4,34	3,75	3,40	3,18	3,02	2,90	2,80	2,73	2,66	2,46	2,3	2,23	2,17	1,97
24	5,71	4,31	3,72	3,37	3,15	2,99	2,87	2,77	2,70	2,63	2,43	2,32	2,20	2,14	1,94
25	5,68	4,29	3,69	3,35	3,12	2,96	2,84	2,75	2,67	2,61	2,41	2,30	2,18	2,1	1,91
30	5,56	4,18	3,58	3,24	3,02	2,86	2,74	2,65	2,57	2,51	2,30	2,19	2,07	2,00	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,12	2,90	2,74	2,62	2,52	2,45	2,38	2,1	2,06	1,94	1,87	1,64
50	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,45	2,38	2,31	2,10	1,99	1,86	1,79	1,55
60	5,28	3,92	3,34	3,00	2,78	2,62	2,50	2,41	2,33	2,27	2,06	1,94	1,81	1,74	1,49
120	5,15	3,80	3,22	2,89	2,67	2,5	2,39	2,29	2,22	2,15	1,94	1,82	1,68	1,61	1,32
Mil	5,03	3,70	3,12	2,79	2,57	2,42	2,30	2,20	2,12	2,06	1,84	1,72	1,58	1,49	1,13

Ejemplo 1: Significancia = 0.01, una cola. Gli de la varianza grande = Gli del numerador = 20, gli de la pequeña = gli del denominador = 13. La F vale 3.66.

Ejemplo 2: Significancia = 0.025, una cola. Gli de la varianza grande = Gli del numerador = 15, gli de la pequeña = gli del denominador = 7, La F = 4.56.

Ejemplo 3: Significancia = 0.10, dos colas. Gli de la varianza grande = Gli del numerador = 3, gli de la pequeña = gli del denominador = 17. La F vale 3.20.

Ejemplo 4: Significancia = 0.05, dos colas. Gli de la varianza grande = Gli del numerador = 15, gli de la pequeña = gli del denominador = 7. La F = F+ vale 4.56. La F con los gli intercambiados vale 3.29, la F- vale 1/3.29 = 0.304.

Tabla de F_+, valor crítico superior de la F, con DOS colas y $\alpha = 0{,}10$, o con UNA cola y $\alpha = 0{,}05$

En el primer renglón están los gli (grados de libertad) del numerador subrayados. En la primera columna los gli del denominador.

F_+ = Valor crítico superior de la F con DOS colas y $\alpha = 0{,}10$, o con una cola y $\alpha = 0{,}05$															
En el primer renglón están los gli del numerador. En la primera columna los gli del denominador															
gli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	∞
2	18.5	19.0	19.1	19.2	19.3	19.3	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.61
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.37
6	599	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.41	3.38	3.34	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.41
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.21
14	460	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.85
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.18	2.10	2.01	1.96	1.82
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.79
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.13	2.05	1.96	1.91	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.74
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.09	2.01	1.92	1.87	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.63
40	408	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.51
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.44
60	4.00	3.15	2.76	253	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.75	1.66	1.55	1.50	1.26
∞	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.01	1.94	1.88	1.84	1.67	1.58	1.46	1.40	1.00